台湾小学资优班一位个案教师的数学教学表现

刘祥通、黄继仁、 陈明聪

数理教育所、师资培育中心、特殊教育系
国立嘉义大学

摘要

台湾的小学资优资源班的数学教学，不是数学相关科系教师担任， 而是在特殊教育系修足资优教育学分的师范生任教，他们的数学教学表现是资优教育与数学教育学者所关切的。

本文列出几题关于分数除法的表达式子，然后给六年级的资优生拟题，要求他/她们写出对应的应用问题情境。研究者帮助个案教师对学生的拟题表现进行分类，找出正确与错误的拟题表现，并指出错误的可能原因。期待个案教师能经由教学，帮助学生修正错误，也帮助学生经由解决问题、连结、沟通、说理、表征与评估等过程，使得最后学生的拟题有更好的表现。

本文的重点在描述个案教师是否能有效地达成教学任务？探讨个案教师的教学表现如何?

关键词: 分数除法、拟题表现、数学教学表现、资优教育

研究背景

布鲁姆(1985)发现许多在小学教资优班的数学教师，都没准备好与资优生一起探究数学，台湾的资优班老师也有相同的问题。

目前小学资优资源班的教师的数学教学专业，包括数学内容知识、数学课程知识、儿童数学知识，特别是资优儿童的数学知识。如果以上知识不够齐全，将影响了他/她们的数学教学内容知识。

大部分的学生都知道如何做分数除法计算式，并获得正确答案，但是我们要求学生拟出几个应用问题，以对应到计算问题，多数学生是有困难的。解题(problem solving)自 1980 年代以来是数学教育的重心，拟题(problem posing)帮助连结真实世界与数学世界，因此拟题是解题的伙伴，也受到很大的关切。关于除法运算，应用问题的情境，可以分成三种，等分除、包含除以及与比例问题有关系的除法。依照研究者的教学经验，一般学生是有困难拟出适当情境的应用问题以对应之。

研究问题

资优生可能也无法针对分数除法的计算问题，拟出适当的应用问题。因此本研究探讨个案教师如何帮助学生完成学习目标?以及探讨个案教师的教学表现如何?

文献探讨

文献探讨分成三段，拟题在数学学习的角色、教师的数学教学专业知识，以及资优数学教学课程与教学模式，分述如下:

一、拟题在数学学习的角色

荷蘭的數学教育改革致力于发展真实數学教育（Realistic Mathematics Education, 简称 RME)，强调真实情境中的數学学习，也就是數学教育应与真实世界相連结(Freudenthal, 1971)。Freudenthal(1971)认为 RME 的论点是将数学视为是人类的活动，数学是从做数学中（doing mathematics）而获得的，数学是帮助学习者与周遭环境产生意义的一种工具，而真实情境是用来作为学习数学的起始点。

数学建模强调现实世界与数学世界之间的连结（connections)，是一种知识统整的数学能力。数学建模是藉由模式来探究现象的规律，其中必定包含介于待建模的真实情境和此模式的数学表征之间的转变(Mason & Davis, 1991)。左台益和胡政德(2009)在研究中指出如果再利用解题时的元素(问题，答案)将现实世界和数学世界各区分成两个部分，分别是情境模式、情境结果、数学模式与数学结果等四个元素。其中现实世界与数学世界之间的交互作用和复杂的转换与推论关系如图 1。

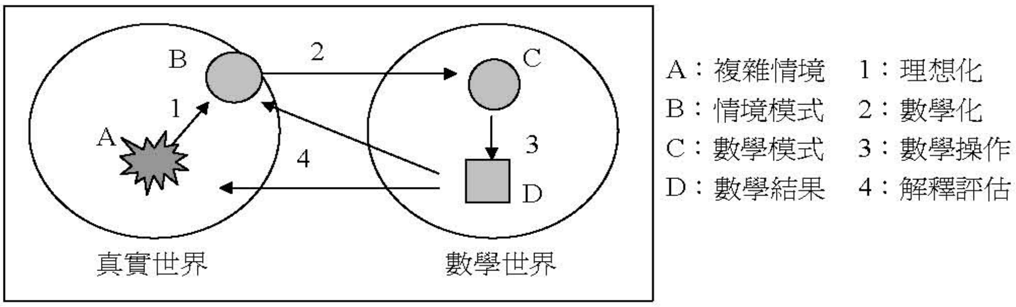


图 1 ：数学建模循环模式 (引自 左台益、胡政德，2009)

Blum(2002)在研究中指出，数学建模的历程主要包含了四个层面：理想化、数学化、数学操作和解释评估，而且数学建模是在这四个层面中循环。邱微惠和刘祥通(2017)针对此四个层面赋予例子，以帮助读者了解。

(一)数学化：情境模式 => 数学模式(问题)

一般的时间应用题解题的拟定计划，如：「下午 2 点开始写功课，每样写 30 分钟，写了 3 样，写完是何时？」=>「2+0.5×3」

(二)数学操作：数学模式(问题) => 数学结果

一般的时间应用题解题的执行计划，如：「2+0.5×3」=>「3.5」

(三)解释评估：数学结果 => 真实情境

回顾答案的合理性，如：解释与评估「下午 2 点开始写功课，每样写 30 分钟，写了 3 样，写完是何时？」，此答案是否为「下午 3.5」?此答案是否合理?

邱微惠和刘祥通(2017)认为，以上数学建模的三个过程，与拟题的过程有紧密的关系。当学生依据教师所布置的计算问题进行拟题活动时，先要拟出题目，然后依照解题策略进行解题活动。在规划解题策略时，学生有时候会发现，已拟好的题目中有些条件不完整，所以无法顺利进行解题策略，这时就必须再重新检视已拟好的题目，做修正或重新进行拟题活动。

二、教师的数学教学专业知识

Shulman (1986) 强调教师的知识特别重要的有三种，分别是内容知识、课程知识与教学内容知识。Shulman (1987)再加上其他四种知识，以评估教师的教学能力，分别是了解学习者的知识与特征、教育情境的知识，教育目的，宗旨和价值观的知识。

数学课程知识包括垂直课程知识、周边课程知识(水平课程知识)，对于数学教学知识是很重要的(Shulman, 1987)。为了响应数学课程知识在数学教学专业的重要性，研究者举以下例子说明:如果一位教师深入了解以上两种知识，就可以得知学生已经学到什么，以及与给定的主题有关连的又是那些题材。以分数除法为例，以 $\frac{1}{4}\div\frac{1}{3}$为例，下方两例($2\div\frac{1}{4}$ 、$\frac{1}{4}\div 2$)为先备知识；而与$\frac{1}{4}\div\frac{1}{3}$相同位阶的例子($\frac{1}{4}\div 0.33$、$\frac{1}{4}\div 33\%$、$\square\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$)为水平内容知识；$(-6)\div 3$为国中才会学到之分数运算。

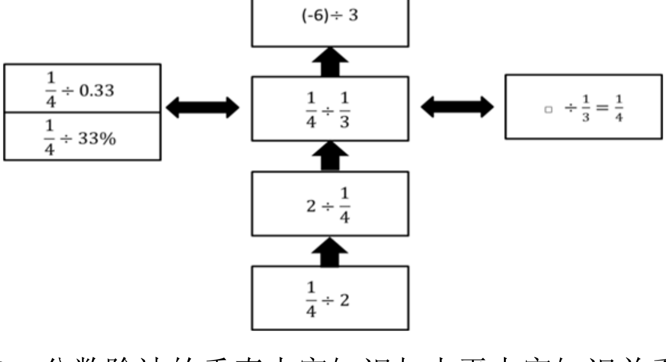


图 2：分数除法的垂直内容知识与水平内容知识关系图

三、资优数学教学课程与教学模式

给资优生的数学课程活动时，应检视以下的目的（Sheffield, 1999）：

1. 帮助学生成为深度的数学思考者。
2. 发展有知识素养的公民（informed citizenry）。
3. 允许学生经验数学的乐趣与美妙（the joy and beauty of mathematics）。
4. 能增进学生在大学（或以上学位）的竞争力（to be competitive）
5. 在日益科技化的社会里，发展成为世界领导的地位。

根据以上几个目的，发展数学的创造力与复杂的推理能力（complex reasoning）是资优数学教育的两个重要考虑。关于发展创造力与复杂的推理能力，Sheffield (1999)所提倡的开放式捷思教学模式是一种发展学生创造力很有效率的方法，这个模式没有特定的起点，也没有特定的顺序，这个模式包含五个元素，分别是关联（relate）、调查（investigate）、沟通（communicate）、评估（evaluate）与创造（create）。例如，教学者可以使问题关联到学生以前的数学概念，以发展多样策略以解决此问题；也可以鼓励学生调查原来问题时，又可以创造有兴趣探讨的新问题；当新的问题被探讨时，鼓励学生提出不同的假设，然后评估这些不同的假设是否成立；最后，为了扩大学习效果，一旦有了新发现，老师有责任要求学生发表与沟通，让学生学习更多的解题策略与不同想法（Sheffield, 1999）。

为了呼应与强调数学教育的五大过程，解题、沟通、推理、连结与表征(NCTM，2000)。研究者在历经小学资优资源班实践 Sheffield(1999)所提出的模式后，提出一个以问题为中心数学教学模式(如图 3)，此模式特别是给资优班的数学教学，其成分如下，1. 解题 (problem solving) :老师布题后， 暂不提示学生解题发法，先给学生解题，以学生的发展解题能力。2. 连结(connection): 如果学生不会解题，老师根据学生可能的先备经验，帮助学生建立连结，或关连到不同情境的相关问题，给学生解情境不同但结构相同的问题，或是简化问题中的数据给学生再尝试的机会。3. 沟通与说理 (communication and reasoning)，根据学生的解题表现，给学生沟通与说理的机会。 4. 评估 (evaluation): 请学生互相评估各类解题表现，给学生学习评估，与发挥后设认知与检讨解题表现的机会。5.再表现与创造 (representation and creation): 互相评估各类解题表现的结果，给了学生相互借镜的机会，也就是借助于同学的方法再修饰自己的方法，因此，作者特地用「再表现(representation)」一词， 以表达互动后的表征，学生的确也藉由沟通与说理、以及评估的历程，达到搭便车后的创造效果。

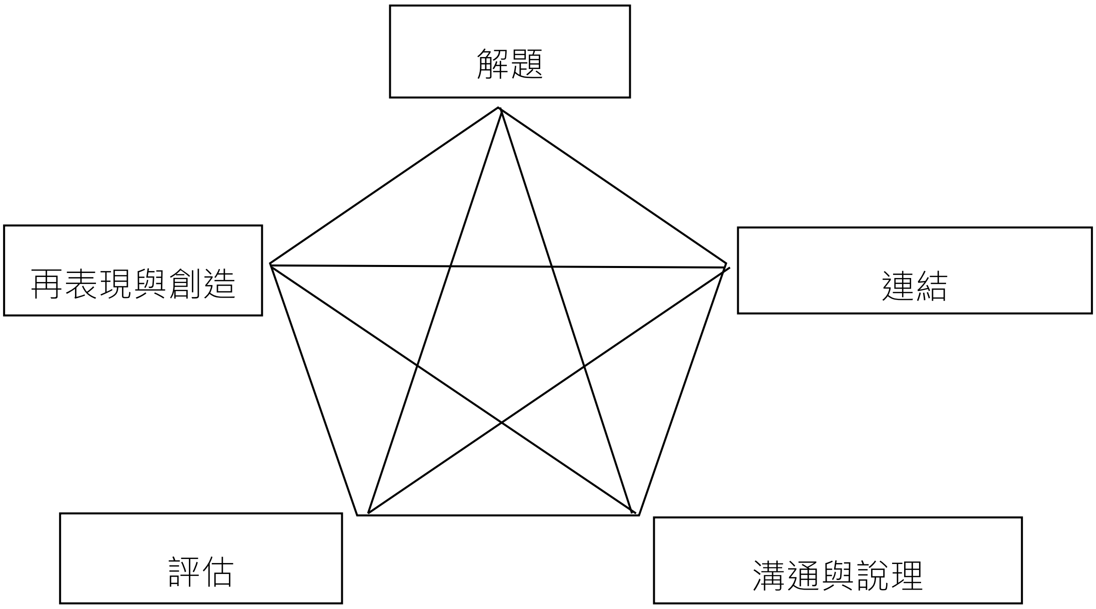


图 3 :以解题为中心的数学教学模式
(引自 刘祥通、陈明聪与徐伟民，2015)。

研究方法

本研究采用个案研究法，参与教师有十年资优班教学经验，他也获有特殊教育学士与硕士学位，专长是资优教育，负责数理教育的课程，他常在课室进行游戏活动与科学探索。此个案是有代表性的个案，以下简称 A 老师，也由于 A 老师与研究者关系良好，可以提供丰富的讯息，以作为解释之用，也可以达到我们了解的最大化(maximize what we can learn; Stake, 1995)。因此研究者想了解 A 老师如何帮助学生意义化分数的除法运算。

参与学生:四位六年级学生

此四位学生是市政府教育局检定合格的资优学生，他们在原来班级已学过分数的乘除法计算，也有解过比例问题的经验。虽然”拟题”对他/她们而言是一个新的任务，但是他们有机会先经验说明例，以了解”拟题”的意义与目标。以下用 A1、A2、A3、A4 分别代表四位学生。

拟题的说明例

情境:计算问题 $12 \div 3 =?$

编拟问题:

甲生:有 12 元，等分给 3 位小朋友，请问每人可以得到多少元?

乙生:有一彩带有 12 公尺长，如果 3 公尺剪成一段，请问可剪成几段?

丙生: 如果 12 元可以买 3 公斤的橘子，请问每公斤多少元?

拟题任务单(篇幅关系，只呈现一例)

下列是除法问题的计算式子($\frac{1}{4} \div \frac{1}{3}$)，请拟出两个不同情境的文字题以对应一个算式。

教学原则:

根据 Fig.2 数学解题教学模式，研究者要求个案教师尽量做到教学原则

1. 指出不合理拟题
2. 如果学生的拟题不恰当，连结学生的先前经验
3. 促进学生沟通与说理
4. 鼓励学生评价同侪的拟题表现
5. 为了有更精致的拟题表现，给学生再次拟题的机会

数据源与分析

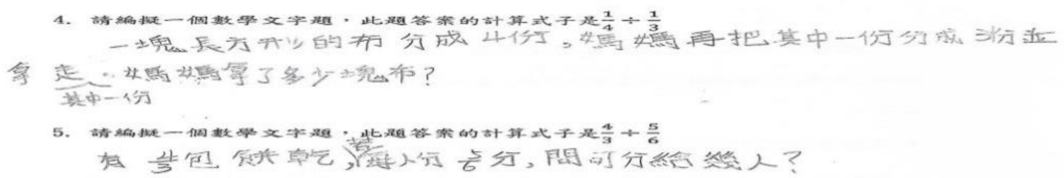
本研究搜集资料很多元，采用三角校正法，检验数据的效度，也用持续比较考验信度。例如:给个案教师分数除法的任务单时，个案对于这个拟题任务单的响应，学生拟题后个案对于学生拟题表现的评价，个案受访时对于分数除法的教材地位的掌握，个案针对学生的拟题所进行的教学表现，这些数据源可以用来互相比对，以判断数据的一致性(信度)与是否有效(效度)。

研究结果与讨论

以下分成两段，先介绍学生的拟题表现，其次讨论教师的教学表现。

1. 四位参与学生的拟题表现

A 生: 分成 $\frac{1}{3}$ 堆



4. 請編擬一個數學文字題，此題答案的計算式子是$\frac{1}{4} \div \frac{1}{3}$

一塊長方形的布分成4份，媽媽再把其中一份分成3份拿走，媽媽拿了多少塊布？

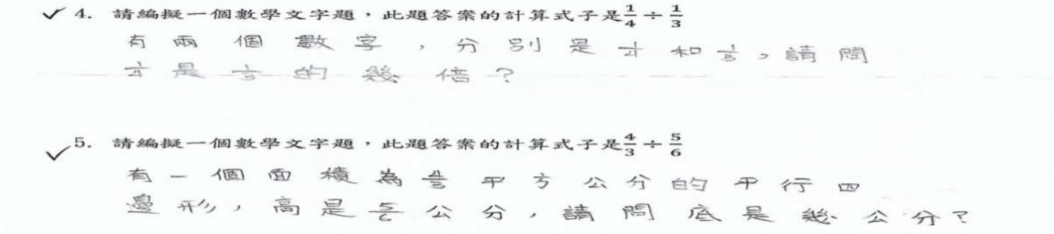
其中一份

5. 請編擬一個數學文字題，此題答案的計算式子是$\frac{4}{3} \div \frac{5}{6}$

有$\frac{4}{3}$包餅乾，若每人分$\frac{5}{6}$分，問可分給幾人？

图 4：A 生的解题表现

C 生:



4. 請編擬一個數學文字題，此題答案的計算式子是$\frac{1}{4} \div \frac{1}{3}$

有兩個數字，分別是$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{3}$，請問$\frac{1}{4}$是$\frac{1}{3}$的幾倍？

5. 請編擬一個數學文字題，此題答案的計算式子是$\frac{4}{3} \div \frac{5}{6}$

有一個面積為$\frac{4}{3}$平方公分的平行四邊形，高是$\frac{5}{6}$公分，請問底是幾公分？

图 5：**C** 生的解题表现

本研究虽提示学生可以拟出二种以上不同的情境，但是，可能是初次拟题的关系，他们都只呈现单一的拟题，分述如下:

A1 生: $\frac{1}{4}$ 公斤的面粉，如果分成 $\frac{1}{3}$ 堆， 每一堆有多重?

A2 生: 有两个分数分别是 $\frac{1}{4}$ 与 $\frac{1}{3}$, 请问 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{1}{3}$ 的几倍?

A3 生: 如果 $\frac{1}{3}$ 罐的牛奶有 $\frac{1}{4}$ 公升， 请问 1 罐有多少公升?

A4 生: 一个长方形的面积是 $\frac{1}{4}$ 平方公尺，一边长是 $\frac{1}{3}$ 公尺，请问另一边长是多少?

学生拟题的类型可以分成: 等分除、包含除、比例问题的情境，与面积模式。他们所拟的应用题简述如下:

A1 生的拟题，现实上无法分成 $\frac{1}{3}$ 堆，除数是分数时，无法用等分除的问题情境来拟题。

A2 生的拟题，他以包含除的方式，对照 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{1}{3}$ 的几倍? A2 受访时， 他可以接受两者的比值 $\frac{3}{4}$ ， $\frac{3}{4}$ 虽然小于 1，也可以成为 $\frac{3}{4}$ 倍。

A3 生的拟题，他的方法看似用比例问题的方式拟题呈现，除数是 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ 公升除以 $\frac{1}{3}$, 得到一单位之量(1 罐是多少公升)。他的方法可说是完美的，但受访时，他坦承模仿说明例中丙生的拟题: 「如果 12 元可以买 3 公斤的橘子，请问每公斤多少元?」他将 3 公斤，改成 $\frac{1}{3}$ 罐，12 元改成 $\frac{1}{4}$ 公升。然后他发挥后设认知的功能再确认:「如果 $\frac{1}{3}$ 罐的牛奶有 $\frac{1}{4}$ 公升，请问 1 罐有多少公升?」的情境合情理。

A4 生的拟题，长方形的面积公式是长×宽，因此，用面积除以一个边长之值，就是另一个边长之值，此模式可称为「面积模式」。A4 生受访时说:他说长方形面积与平行四边形面积都适用，三角形面积公式，多乘上一个 $\frac{1}{2}$ ，还不适用。

2. A 老师对于四位学生拟题的评价与教学因应

对于 A1 生，老师有注意到分成 $\frac{1}{3}$ 堆，是不符合情境的。A 老师采取提问法，「你们可以将一个蛋糕切成 3 片， 你可以切成 $\frac{1}{3}$ 片?」，学生在提问之下已发现 $\frac{1}{3}$ 片不合事实。接着，A 老师解释 $\frac{1}{4}\div 3$ 代表 $\frac{1}{4}$ 分成 3 等分，然后，出乎意外地，他转向介绍分数除法的换算，$\frac{1}{4}\div 3=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$ 对于资优生来说，应该都很熟悉分数除法，改成颠倒相乘的算法，研究者认为这种解释顶多只是复习学生的先备经验而已，他并没有说明或给学生讨论，当除数是分数时，等分除的情境是不适当的，需要改用其他情境来拟题。

对于 A2 生，老师质问学生 $\frac{1}{4}$ 比 $\frac{1}{3}$ 还小，可以说成 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{1}{3}$ 的几倍吗?课后研究者，为了确认 A 老师的想法，A 老师认为只能说成 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{1}{3}$ 的几分之几?不能说是几倍? A2 生说，他以 $\frac{1}{3}$ 为基准量去看待 $\frac{1}{4}$ 的大小，得到 $\frac{3}{4}$ 的新单位量，这种想法具备了基准化的观点，也就是 A2 生采用「包含除」的观点，以对照两分数的关系，可惜 A 老师没有肯定他的观点，以至于其他三位同学也失去了观摩与聆听的机会。

A3 的方法，采用比例问题的情境，拟题也是无缺点的，对于此情境"为何可以直接用除法解答?"，老师应更进一步要求 A3 沟通与说理，帮助其他同学理解，也可以求证 A3 的想法是自发的? 还是模仿的?是否合乎情理? 可惜老师并没有这样做。此问题，老师可以先简化 A3 生的拟题为「如果 $\frac{1}{3}$ 罐的牛奶有 1 公升，请问 1 罐有多少公升? 」，给其他同学见识到此题的计算式子是，也是除法「$1\div\frac{1}{3}$」，等待其他学生了解后，再回头评价 A3 的拟题「如果 $\frac{1}{3}$ 罐的牛奶有 $\frac{1}{4}$ 公升，请问 1 罐有多少公升?」是否合理? 也可以请学生假设一罐是□公升，$\square\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$，给学生发现:移项就得到 $\frac{1}{3}\div\frac{1}{4}$ 的除法算式。

对于 A4 生采用面积模式，A 老师在教学前，已先问研究者此模式是否可以?此模式可用于任意两数相除的计算式，是否被接受? 研究者认为以面积模式来拟题是合理的，一个长方形面积、长与宽都可以是整数、分数或小数。只是，如果学生持续用面积模式拟题，可能就失去学习其他情境，以对应分数除法的机会。

结论与建议

根据上述研究结果与讨论，A 老师的教学表现，可以分成以下四点来响应：

一、充实课程知识，以强化数学教学知识

A 教师坦承很少去检视学生该年级所学的数学教科书，因此，A 老师了解学生所学的先备数学知识是非常有限的，也欠缺分数除法的铅直课程知识与周边课程知识；再者，经由拟题的练习后，学生才经验到等分除的情境只限于除数是整数的情况，如果除数是分数，只能用包含除、比例问题的情境或用面积模式来拟题，A 老师少了以上这些数学课程知识，因此影响了数学教学知识，也影响了他的教学表现。

二、利用包含除的情境， 增强基准化的观念

分数除法只是一种程序性知识。了解除数、 被除数、与比值的关系是一种概念性知识。A2 生的拟题:例如甲乙二数分别是 $\frac{1}{4}$、$\frac{1}{3}$，甲数是乙数的几倍?这样的拟题过程，建构了甲乙两数与倍数(比值)的关系，也就是概念性知识，也意义化了除法运算的机会。以 $\frac{1}{3}$ 基准量，对照 $\frac{1}{4}$ (比较量)，这是基准化的过程，基准化的过程在高年级的学生是较难理解概念，给了学生拟题的机会，也就是帮助他们强化基准量、比较量与比值的关系。站在教学的观点，A 老师应该多加着墨，也许是对于数学内容知识的欠缺以及数学课程知识的生疏，他的教学就轻易的带过，没有利用 A2 生的精采拟题给其他学生观摩，也没有做到多数学生都达成学习目标的任务。

三、利用比例问题的情境，找一单位之量

A3 生的拟题为「如果 $\frac{1}{3}$ 罐的牛奶有 1 公升，请问 1 罐有多少公升? 」他的方法，可以被看成是 $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=1:X$ 的比例问题。更简单的情境，「如果 1 公尺相当于 $\frac{1}{7}$ 条绳子等于 1 公尺长，请问 1 条绳子是多少公尺？」也可以被看成是 $\frac{1}{7}:1=1:X$ 的比例问题，简捷法是 $1\div\frac{1}{7}=7$ (公尺)。

我们使用$\frac{1}{4}\div\frac{1}{3}$ and $1\div\frac{1}{7}$ 可以找到一单位之量(丨罐多少公升? 一条绳子有多长?)。在链接分数除法与比例问题的求解方面，由于 A 老师缺少了上述的观念，以致对于学生的帮助，有力有未逮之憾。

四、可以延伸面积模式，以收举一反三之效

A4 生提出面积模式，A 老师可以拓展 A4 生的想法， 请大家继续提出新的模式， 也许学生可提出，体积=面积× 高、或者距離 = 速率 × 時間， 因此得到如下的拟题:

1. 已知一个长方体的体积 $\frac{1}{4}$ 立方公尺，底面积 $\frac{1}{3}$ 平方公尺， 请问此长方体的高是多少?

2. 一段路程 $\frac{1}{4}$ 公里，某人花费了 $\frac{1}{3}$ 小时走完， 请问他的平均速率是多少?

A 老师如果能以 A4 的想法为素材，请同学继续创作，或许会有「百花齐放」 的成果。

Reference

Bloom, B. S. (1985). *Developing talent in young people.* New York: Ballantine Books.

Sheffield, L. J. (2003). *Extending the Challenge in Mathematics: Developing Mathematical Promise in K - 8 Students*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Shulman, L. S. (1986).Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review* Feb. 1987: 1-22.

左台益、胡政德(2009)。准教师从真实情境中建构数学模式的认知因素分析与机制。当代教育研究季刊，17 (4)，61-101。

劉祥通、陈明聡与徐伟民（2015）。资优数学课程设计与教学模式运用实例。载于郭静姿主编，资优教育课程设计与教学模式运用实例。台北：华腾文化。