

另类路径学代数

—国小代数补救教材之发展与探究

姚如芬
嘉义大学数理教育研究所 副教授

摘要：基于「数学学习机会的公平性」、「补救教材发展的迫切性」、以及「国小代数学习的重要性」，本研究从国民小学的「代数」主题出发，根据九年一贯课程纲要数学学习领域（97年版）一年级至六年级的各项「代数」分年细目，尝试发展各式不同学习情境之国小代数补救教材与教学活动。研究者邀请国小教师、国中教师、以及补习班教师、还有关心台湾数学教育发展与学童数学学习的硕士班研究生与大学生，共同组成「代数小学堂」—国小代数补救教学研究小组，合作开发代数补救教材与设计代数教学活动；截至目前为止，共计研发出18套不同学习路径的国小代数补救教材，包括以数学游戏、数学绘本、生活情境、以及具体操作等方式来进行「代数」的学习。期望能藉此从研究的角度较具系统地研发代数补救教材、同时进一步协助教师在教学现场进行代数补救教学，以提升国小学童的代数学基本能力，并为未来更高深的数学学习做好准备。

关键词：代数、国小学童、补救教学

壹、研究缘起

以下将从「数学学习机会的公平性」、「补救教材发展的迫切性」、以及「国小代数学习的重要性」三方面来论述本研究的源起与动机。

一、数学学习机会的公平性

许多文献指出，当前数学教育改革皆强调所有的儿童都应有公平的机会接受数学的洗礼，以及能够公平地学习数学与了解所学的内容(Deschenes, Cuban, & Tyack, 2001; NCTM, 2000)。也就是说，在教学现场中，教师不仅要照顾大

多数孩子的受教权，也应该珍视少数特殊孩子的学习。

而在许多国家还在实施菁英教育的同时，连续两届在「国际学生评量计划」(Program for International Student Assessment, 简称 PISA) 测验中表现优异的芬兰却反其道而行，绝不标榜菁英，而是坚持每一个小孩公平受教。芬兰贯穿教育改革脉络、促使教育政策成功的核心价值是「一个也不能少」的平等精神。

台湾九年一贯数学领域课程纲要（教育部，2001）亦主张数学的教与学应该能够照顾到大多数的孩子，课堂内的数学教学亦应能够让多数的学生融入与参与。然而，虽然多数的教师皆同意弱势学习者(如新移民女性子女、原住民学童、社经文化资源不利家庭之子女等)是需要更多的关怀与协助，但他们通常不是数学教育研究领域内受关注的焦点 (Baxter, Woodward, & Olson, 2001; Cramer, Behr, & Post, 2002; Empson, 2003; NCTM 1989, 2000)，虽然从现实面观之，台湾有许多学童在数学学习上遭逢困难，已是一个普遍存在的事实。

二、补救教材发展的迫切性

“教育部”虽有「携手计划-课后扶助」及「教育优先区计划-学习辅导」等相关的因应政策之推动，但因为此两项政策均是立基于社会之公平正义而拟定，故旨在照顾弱势之个人或地区，尚未关注到不具弱势身分之国中小学习低成就学生。然有鉴于 12 年国民基本教育实施后，国中学生将可免经升学考试直接进入高中（职）或五专就读。因此，如何进行补救教学以确保每一位国民中小学学生之基本学力，并避免国中学生之基本学力因无升学考试而下降，已成为 12 年国民基本教育的核心课题之一，教育部认为有必要藉由拟订补救教学实施方案予以具体实践，甚至更应修订法规赋予权责，俾使学生、教师、学校、家长及主管机关正视补救教学之重要性，也因此“教育部”将『扶助每一位学习低成就学生，弭平学习落差』、以及『确保国中小学生之基本学力，提升学习质量』明确列为近期所推行的『国民小学及国民中学补救教学实施方案』中的两项方案目标。

不过“教育部”亦意识到由于补救教学强调对学生进行个别化之教学，倘无备课将无法达成补救教学之成效，然而目前并无统一释出之补救教学教材，因此教师在进行补救教学时需自行去搜集或设计补救教学教材，以因应个别学生之不同学习落点需求，过多之备课时间增加了教师的教学负担、也影响到教师担任补救教学师资之意愿。

过去几年来，研究者所指导的硕士论文大多是聚焦在数学科补救教学之发展与探究，从陪伴他们完成学位论文的过程中，除了看见台湾学童学习数学的困境、更看见了第一线教师在发展数学科补救教材的难处；然而台湾目前针对数学科补救教材的研发却较缺乏系统性的探究，亦即，虽有需求，却较缺乏从研究的角度投注相关的人力与资源。研究者于是结合过去在「弱势学习者的数

学学习探查与辅导」以及「数学教学模块的发展」此二面向的相关研究成果与省思，朝向「数学科补救教材发展模式之探询」继续迈进。

三、国小代数学习的重要性

由于在美国，所有的学生都必需学代数（algebra for all）已是一个被广泛接受的观点，不论是中小学生都应该要有相关的代数学习经验，以为后来学习更正式的代数作准备（NCTM, 2000），毕竟，代数对于学生未来的生活相当重要，不管是工作或是继续升学。Lodholz (1999) 亦认为代数是推论过程的一部分，是一种解题策略，并且是数学思考与沟通之钥。代数推理本身所采取的许多形式，以及代数所使用的表征，象是图像、表格以及公式等，皆是人类文明发展出最有力量的智慧工具。若没有一些代数符号的形式，也就难以产生较高等级的数学和量化科学。

而事实上，学童的数学学习若欲从具体的数量计算进阶至抽象的符号运作，其思维必须从算术的系统进展到代数的系统；不过，根据许多国内外的研究显示，学童在此二系统的跨越是存有许多困难的（林光贤、郭汾派、林福来，1989；Booth, 1984, 1988；Kieran, 1992, 2004），甚至，算术的学习经验亦有可能会牵绊其代数的学习（Knuth, Stephens, McNeil, & Alibali, 2006；Schiemann, Carraher, & Brizuela, 2007；Cai & Moyer, 2008）。例如：国小学童易将等号视为由左而右运算而得的结果，而非二数量的关系（Erlwanger & Berlanger, 1983；Falkner, Levi, & Carpenter, 1999；Kieran, 1981；Saenz-Ludlow & Walgamuth, 1998），这些研究同时亦发现：学习的情境与脉络很有可能会偏限了学童对于符号意义的理解。

再者，每位国小学童在进入中学就读的同时，皆已具备有算术运算的认识，这些认识有可能会进而影响他们对于符号的解释与符号运算表征过程（Oksuz, 2007）。因此，如何及早为国小学童营造一个合宜的代数学习情境，以协助他们搭起衔接算术世界与代数世界的桥梁，实为一个值得探究的课题。

综上所述，研究者乃从国民小学的「代数」主题出发，根据九年一贯课程纲要数学学习领域（97年版）一年级至六年级的各项「代数」分年细目，尝试发展各式不同学习情境之国小代数补救教材与教学活动。期望能藉此从研究的角度较具系统地研发代数补救教材、同时进一步协助教师在教学现场进行代数补救教学，以提升国小学童的代数学基本能力，并为未来更高深的数学学习做好准备。

贰、文献探讨

本章首先针对国小代数教材内容进行解析，并整理有关代数教与学的相关

研究，以作为本研究之「教材内容」的理论依据；接着针对多元化的数学教/学策略提出说明，包括游戏教学、「故事式」教学与情境学习，以作为本研究之「教学设计」的理论依据。

一、国小代数教材分析以及代数教与学的相关研究

根据“教育部”2003年颁布的九年一贯课程正式纲要(以下简称九二正纲)中数学领域所揭示的学习内容(教育部，2003)，从国小一年级开始即包含有代数的分年细目，包括：「能在具体情境中认识等号两边数量一样多的意义(1-a-01)」、「能在具体情境中认识加法的交换律、结合律，并应用于简化计算(1-a-02)」、「能在具体情境中，认识加减互逆(1-a-03)」等三项；接着在二年级出现有关「加减法的算式填充题」、以及在具体情境中认识「递移律」与「乘法交换律」等项分年细目；而三年级除了有「乘除法的算式填充题」外，还包括有「乘除互逆」的认识；至于四年级的代数分年细目中除了涵盖有在具体情境中认识「乘法结合律」外，还希望学生「能将具体情境中所列出的单步骤算式填充题类化至使用未知数符号的算式，并能解释式子与原问题情境的关系(4-a-02)」等项。从这些中、低年级所涵盖的代数学习内容可以窥见：九二正纲之后，早期代数(early algebra)的学习已逐渐在数学课程中被强化。

基本上，比起历年来其他版本的数学课程纲要，从九二正纲之后，在国小的数学学习题材中，对于学童代数学习的引入算是较早开始的，也因此，过去在台湾以代数为主题的相关研究多集中于中学生或国小高年级学童的代数学习或教学成果，且大多是聚焦在文字题解题的相关研究(林清山与张景媛，1994；戴文宾与邱守榕，2000；谢和秀与谢哲仁，2002；李美莲与刘祥通，2003；洪有情，2006；陈嘉皇，2006)，至于有关国小低年级学童代数学习的探究在过去则较少付之阙如。

近年来国际间有许多研究(Bodanskii, 1991; Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2001)发现，经由系统化的教学，国小中、低年级学童的代数学习表现，优于同侪甚至高年级学童。而学童究竟何时适合开始学习代数？须等其认知发展成熟后吗？近年来有些学者提出了不同的看法，他们认为若代数引入教材的方式正确且时机适当，即使幼童亦能学习与文字符号相关的代数内容。如Davis(1989)即认为如果能将代数的学习与学童的生活经验连结，而非仅是格式化的数学操弄，则在二或三年级的数学课堂便能引入早期代数。Bodanskii(1991)更发现：从一年级便开始导入代数符号的四年级学童，其在未知数概念的表现，可以优于六年级才导入代数的六、七年级学童。因此，许多数学教育学者皆主张，若能在中、低年级阶段即引导学童讨论代数关系或发展未知数符号的相关概念，则在正式学习代数单元时，能够有更好的学习表现(Brito-Lima& Falcao, 1997; Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2001; Brizuela & Schliemann, 2003)。

事实上, Kaput (1999) 亦曾提出类似的主张, 包括: 应该在儿童早期就开始, 尤其某些部分可以建构在学童非正式的知识上; 透过数学知识的扩展和应用, 可将代数的学习与其他学科的学习加以统整; 可以藉由数学知识的应用, 融入不同形式的代数思考; 以及可以建构在学童自然发生的语言和认知的力量上, 鼓励他们在省思到底学到了什么, 同时说明他们所明了的等等。

基本而言, 不论国内或国外, 认为代数课在早期数学课程执行, 已逐渐在研究者和政策制定者之间扩展。例如: Davydov (1991) 建议代数必须在小学阶段开始; NCTM 于 2000 年出版的《学校数学的原则与标准》亦主张代数推理可以自然地从幼儿园开始培养, 且亦都赞同在早期的教育就介绍代数, 并且建议代数的活动可在正式教育的第一年级就开始实施, 代数符号可以从小三开始就予以教导, 做为课程的一部分 (NCTM, 2000); 陈维民 (1998)、黄宝彰 (2002)、庄松洁 (2004)、陈嘉皇 (2006) 等人的研究亦皆发现, 只要设计合宜的情境, 例如: 利用学童现有的算术基础, 并辅以学童能理解的表征方式与用语, 设计融入代数概念发展的问题来逐步引导、或是在具体情境中以数的基本运算性质来类比未知数的运算与化简等等, 国小学童是可以参与代数推理活动, 学习代数符号的应用并加以解题。

不过仍然有许多人对于这样的观念抱持怀疑的看法, 例如: 国小学童真的可以学习代数吗? 国小教师有能力教导学童代数吗? 以及学童及早学习代数是重要和有用的吗? 等等。针对这些疑虑, Schliemann、Carraher 和 Brizuela (2007) 认为: 学童的学习困难是由于算术和代数之间被鲜明的分割(不论是课程或教学), 以致于无法透过课程的设计, 被适宜的处理; 如果能让算术和代数之间的转化更加容易, 那么它们二者之间就得加以统整。因为 Schliemann、Carraher 和 Brizuela (2007) 在其研究中发现, 只要给予合适的条件, 包括: 与学童的生活经验连结, 而非仅是格式化数学的操弄; 或是植基于学童关于量的连结概念, 来引导学童了解及使用代数的语法规则等等, 学童是可以学习代数推理的。

由于九二正纲于国小正式实施至今仅数载, 所以目前可能仍有许多教师尚无法充分理解: 当学童 (特别是国小中、低年级学童) 遭遇代数学习困境时, 教师可以提供何种教学协助来帮助学童跨越代数学习障碍。是故, 从低年级阶段开始, 理解我国国小学童的代数迷思概念与代数学习困境, 并提供有效的代数补救教学策略 (含教材与教学活动) 给第一线的教师参考, 实有其必要性与迫切性。

二、多元化数学教/学策略—游戏教学、「故事式」教学与情境学习

由于多数需要补救的数学低成就学童大多伴随有学习兴趣亦显低落的相关问题, 因此补救教学活动的设计除了需协助学童克服数学学习困境外, 亦应考虑学童的「情意」面向, 包括透过补救教学活动提升学童的学习兴趣或动机等等。

已有许多实证性研究证实游戏教学不仅有助于增进学童对数学概念的正确建构，还能引起学童的学习动机，达到寓教于乐的效果。再者，喜欢故事乃是人的天性，『「故事」可称是教学之心』(Collins & Cooper, 1997)，特别是对年纪小的孩童，故事彷彿具有神奇的魔法，令人无法抵抗它的魅力。熊召弟(1996)亦认为童话故事可以做为有效的催化剂，融入课堂教学之中激起学生的学习兴趣，让学生乐于学习。此外，由于情境学习强调知识的学习应建构在真实的活动里、并强调学习活动应与文化结合，亦即，能让学习者在真实的活动中运用其所学的知识，并允许其在学习脉络(context)中摸索，因此，相当有助于学习者发展出多种属于自己的问题解决策略，以便日后易于应用。

即是，本研究采取的代数补救教学策略至少包含有「游戏教学」、「故事式教学」、以及「情境式学习」等三类，分别说明如下：

(一) 数学游戏教学法之意义与模式

所谓「数学游戏教学法」意指让学童在游戏中运用数字，透过数字来思考，在游戏中发展出各种「数、量、形」的概念，在游戏中精熟各种基本的数学运算能力，以及在游戏中学习如何解决数学问题等。此种教学方法的最主要用意是，让学童在游戏中进行有意义的学习，并进行具有挑战性的数学思考活动，而不是让学生反覆进行枯燥的数字运算练习或数学解题练习(饶见维，1996)。儿童都是喜欢玩游戏的，游戏比传统课堂学习更具吸引力，也更能令学生全心全意的投入(郑肇桢，1983)。

事实上，游戏教学有许多模式，研究者主要采用的是「游戏—讨论—重新游戏」教学模式：除了游戏中应包含有「概念」、「学习目标」、「思考运作」、「游戏材料(教具)」、以及「情境布置」等要素，同时亦应兼顾挑战性、合作性与竞争性、机遇性与趣味性、以及教育性等数学游戏教学的特性(饶见维，1996)；然后透过讨论的过程，让学生发表他们赢的策略与思考方法，以利用游戏经验来提升思考，重要的概念亦可从师生讨论互动的过程中获得。至于「重新游戏」最主要的目的在于提供儿童更多概念性及技巧性的学习经验、巩固儿童先前的游戏经验、进而扩大并建立儿童渐进式的理解能力。

研究者认为采用此教学方式可行的理由主要是因为研究对象为国小学童，且数学中有许多较抽象的概念，藉由游戏的过程，让学童透过视觉、听觉、触觉、动觉等多重感官来得到直接经验，这样不仅有助于增进对数学概念的正确建构外，还能引起学生学习动机达到寓教于乐的效果。

(二) 「故事式」教学的相关理论依据

皮亚杰认为「意象是获得知识的工具，附带有认知的功能。」利用意象，将有待记忆的对象符号化、具体化，结合己的经验，经过回忆的深度处理，是能

增进记忆的方法之一，再运用归组技巧(chunking)以及组织技巧(organization)，则记忆效果将可提高不少。

Paivio (1969) 主张从「二元暗码假设」(dual coding hypothesis)解释意象研究结果：一为意象系统(Imagery system)储存与生活中具体物体对应的意象；另一为语文系统(Verbal system)，处理语言单位或字词，也就是一个系统处理图像(pictures)，另一个系统处理描述(description)。两系统各自独立，也彼此连结。他认为若某字没有意象(如苹果)，想记住这个字词，必须仰赖语言系统。另一方面，一个具体的字词或某意象若能形成图画，则可以储存图像及字词。所以他说：「简单而言，两种记忆痕迹比一种好。」(王文科译，1988)。因此，阅读图画故事书对儿童，不论图象系统对记忆的加深，或加上语文的故事阅读，对幼儿甚至成人的意象记忆，影响不可说不大。

医学上已证实语言中枢在左脑，左脑也称为理性的大脑。右脑较偏向想象、统合和直觉，主要功能包括图形和视觉。幼儿阶段语言行为尚未成熟，右脑发挥较大功能，对视觉、图形等讯息反应灵敏，常凭直觉判事物或分类；思考方面，富于想象力，倾向以记忆中的视觉心像(imagery)为主(赵云，1988)。记忆可分为语言和非语言记忆，后者包括视觉、听觉、嗅觉和情感等，「一般说来，非语言记忆比语言记忆强烈。」

此外，亦有许多研究显示孩子需要书中有图，原因有二：一是因为图比字容易理解—图像的形式让孩子能直觉的了解图画的讯息；一是因为孩子需要图画的讯息来指引他们口头上的回应—图画讯息让孩子能直觉的运用语言说出自己的理解(林敏宜，2000)。而且图像讯息提供有趣的经验，让孩子进一步拥有故事所能提供的诸多乐趣(刘凤芯译，2000)。

(三) 情境学习理论

情境学习理论始于 Brown、Collins 与 Duguid (1989) 三人，他们指出知识是蕴含在情境当中，个体与情境持续的互动，建构出自己的知识。亦即个体有主动建构知识的能力，学习则是个体与情境双向互动的历程，知识、技能与情意的建构就发生在学习者与情境间的互动中，使学习者能将习得的知识活学活用(吴宗立，2000)。

关于情境学习理论在教学上的应用，可以分为课程的设计、教学方法的运用，以及评量的方法来论述：

1. 课程的设计

王春展 (1996) 指出国小学童的认知能力和学习经验有限，欲进行有效的学习，在课程与学习情境的安排上便需要具备具体化、真实化的特质。情境学习强调知识的学习是不能够抽离情境；Thorpe (1995) 指出儿童藉由与周遭情境的互动而发展其空间概念。尤其对学龄前儿童而言，他们不断的透过双手和游戏来探索空间概念。儿童与其同侪和成人的沟通互动，也是发展空间概念过

程中不可或缺的一部分。儿童对于情境物品、同侪、成人的反应互动，以及沟通技巧，都对其空间概念的发展有所影响。因此教师在进行情境式的课程设计时，都必须对这些因素加以考量，设计并且规划多元且丰富的学习情境，尤其纳入交互式多媒体的运用、进行校外教学或参观访问，透过操作性的探索、角色扮演、小组研究、脑力激荡等多元化的方式，让学童有机会去经历与思考，让所学的事物意义化（吴宗立，2000）。

2. 教学方法的运用

情境学习理论的主要教学方法为认知学徒制、合作学习、鹰架式学习。Brown等人（1989）指出「认知学徒制」是一种从生手到专家的历程，其教学方法系师徒藉由示范、指导、反省、阐明、探索的步骤，协助学童主动参与学习。「合作学习」是有效情境学习的重要原则与学习历程，透过合作学习可以有效建构知识，藉助合作学习的集思广义，在实作参与中增强所学知识的印象（王春展，1996）。因此教师可安排小组式的座位规划，设计小组合作的问题情境，以增加学童的意见交流。「鹰架式学习」意指在学童的学习之初，教师应扮演教练或协助者的角色，适时提供学童学习鹰架的支援与协助，当学童的能力提升时，教师逐渐减少协助，以培养学童自我支持的能力，让学童脱离教师的鹰架协助，自主学习，发挥最大的潜能（吴宗立，2000）。

3. 评量的方法

徐新逸（1996）指出情境学习与传统学习的「教」和「学」是截然不同的，若仍仅是采用纸笔测验来评量学习成效，有欠公允；情境学习的评量须依学习过程、学习者进步的状况、教学策略的布署及学习的环境，做动态持续的评鉴。其目的是要让教学更理想，并能随时修正及整合教学策略，提升学习成效。故教师应视学童的学习情况而采取适当的教学策略，在教学过程中留意学童的个别差异（Davidman, 1981）。王春展（1996）也提出，教师在引导学童学习时，采用真实性评量或实作评量等方式来了解学童的学习状况与问题，重视学童的学习状况，对学童的学习具有深远的正面影响。

综合所述，生活本身就是一连串解决问题的过程，知识是工具，用来统整、活用、及解决问题，而非仅是片断的记忆（徐新逸，1996）。身为教育者，我们不仅希望学童能了解数学概念，也期盼学童能将学到的知识应用在生活中解决问题，达到「学以致用」的目标。而情境学习理论即是将学习融入实际社会文化与脉络情境中，建构出有意义的知识（王春展，1996）。

叁、研究流程

如前所述，本研究从国民小学的「代数」主题出发，根据九年一贯课程纲要数学学习领域（97年版）一年级至六年级的各项「代数」分年细目，尝试发

展各式不同学习情境之国小代数补救教材与教学活动。兹将主要研究流程与重要步骤说明如下：

一、成立与运作「代数小学堂」—国小代数补救教学研究小组

本研究执行初期，即邀请有丰富教学经验的国小教师两位、国中教师一位、以及补习班教师一位、还有关心台湾数学教育发展与学童数学学习的嘉义大学数理教育研究所硕士班研究生与教育学系大二、大三与大四学生，共同组成「代数小学堂」—国小代数补救教学研究小组。透过每周定期的聚会，开始着手研发国小代数补救教材与设计教学活动。

二、发展国小代数补救教材与教学活动

研究者带领「代数小学堂」成员发展国小代数补救教材与设计教学活动主要分为四阶段：

阶段一为「认识」阶段，主要目的在认识九年一贯课程纲要数学学习领域中有关国小一至六年级所有的代数分年细目；阶段二为「解析」阶段，主要目的在解析各版本的国小数学课本中代数单元的内容、阶段三为「参考」阶段，主要目的在参考国外数学教材中的代数教学设计、阶段四为「实作」阶段：主要系分组开始着手国小代数补救教材的研发与教学设计。

原则上「代数小学堂」每周定期聚会一个下午，称为「小聚」，主要是分组进行国小代数补救教材与教学活动的设计与讨论；每月则再选定一个晚上聚会一次，称为「大聚」，主要是进行各组间的设计进度报告与设计成果之分享及讨论，每次约二至三小时。

三、实践国小代数补救教材与教学活动

本研究于本年度已分别于国小、国中、以及私立补习班等机构完成 7 套代数补救教材与教学活动的实践，兹将协助本研究实践代数补救教材与教学活动的国小、国中或机构（化名）、所在地、教材名称、分年细目、实践班级之学生年级与学生人数、以及教学时间（含前测与后测）等项目整理如表一所示：

表一、实践学校/机构、教材名称、与学生资料一览表

学校/机构	所在 地	教材名称	分年细目	学生年级	学生人数	教学时间
美国小	云林 县	寻宝高手	4-a-02	四	2	5 节课
光光国小	云林 县	大小星世界	2-a-01	四	8	3 节课
		乘除战记	3-a-01	四	8	3 节课
		通往宝藏之路	4-a-02	四	8	3 节课
林林补习 班	云林 县	百大觅景点(1)	5-a-04	七	2	3 节课
		等量公理	6-a-01	七	2	4 节课
		百大觅景点(2)	6-a-02	七	2	4 节课
湖中国中	云林 县	百大觅景点	5-a-04	九	3	3 节课
		等量公理	6-a-01	九	3	4 节课
		百大觅景点(2)	6-a-02	九	3	4 节课

肆、研究成果

目前「代数小学堂」—国小代数补救教学研究小组根据九年一贯课程纲要数学学习领域（97年版）「代数」主题内一年级至六年级的各项分年细目，已研发出18套国小代数补救教材与教学活动，后续仍有新的国小代数补救教材与教学活动持续发展中；兹将「代数小学堂」已发展的国小代数补救教材与教学活动整理如表二所示：主要系以代数分年细目为架构—依分年细目、教材名称/教材封面、活动名称、数学概念、节数与教学资源等项一一呈现如下：

表二、「代数小学堂」所发展的国小代数补救教材一览表

分年 细目	教材名称/ 教材封面	活动 名称	数学概念	节数	教学资源
1-a-01	等号的秘密	等号精灵不 见了 天平的操作	等号的两边一样多	2	学习手册、 教学手册、PPT

		代數小學堂		
				
1-a-02	巴巴玩具工厂 	订单小高手	加減互逆	2 学习手册、 教学手册、PPT
2-a-01	大小星世界 	宠物鱼世界 心中的小星星	>、<、=的概念 数与算式的比较	3 学习手册、 教学手册、PPT
2-a-02	加加台湾走透透 	第一站嘉义 县	递移律	
		第二站新北 市	交换律	
		第三站花莲 县	交换律、结合律	2 学习手册、 教学手册
		第四站高雄 市		
2-a-03	奇奇蒂蒂大对决 	奇奇上学趣		
		抢救大作战	乘法交换律	3 学习手册、 教学手册、PPT
		校庆我最行		
2-a-04	夜市嬉游记 	逛夜市	加減互逆运用于解题	4 学习手册、 教学手册
		小明的生活 日记	加減互逆运用于验算	
3-a-01	乘除战记 	神祕的马雅神殿		
		BOSS X别墅X毒苹果	乘除互逆	3 学习手册、 教学手册、PPT
		无的境界		
4-a-01	结乘露营去	在具体情境中理解		
	概念一	乘法交换律与结合律	2 学习手册、 教学手册	

		利用单位换算的自 然连乘与乘法来了 解乘法结合律	
		当式子只有乘除或 加减时，由左向右进行 逐步进行	
4-a-02		概念二 中国武术家 的试炼	只有加减的运算 时，由左向右进行 逐步进行
		印度战士的勇猛	先乘除后加减
		埃及祭司的考查	括号内的运算先进 行
		水星之旅	计算方式是由左到 右，并运算之。
		金星之旅	计算方式是先乘除 后加减，并运算之
		火星之旅	计算时要先做括号 内的式子，并运算 之
		土星之旅	先算括号内的式 子，再来是先乘除 后加减，且由左向 右计算，并运之
4-a-02		寻宝高手	
4-a-02		分仔忆童年	
		分仔游农村	计算方式是由左到 右，并运算之。
		农村一日游	
		改造小帮手	
5-a-01		分仔忆童年	
		分仔游农村	计算方式是先乘除 后加减，并运算之
		农村一日游	
		改造小帮手	
		农务大小事	
		乘法对加法的分配 律	
		农务大小事	
海绵宝宝生活札记		概念一	先乘再除与先除再 乘的结果相同
5-a-02		概念二	连除两数相当于除 以此两数之积
		旅途危机二	符号列成单步骤被 乘、除未知的算式

			未知整数的单步骤 计算		
			击败女巫	综合练习	
5-a-04			活动一 含有未知数的加减 等式		学习手册、 教学手册
			活动二 含有未知数的乘除 等式	3	
		百大觅景点(1)			
5-a-04		小红帽大冒险	小红帽上学 趣	未知数之列式	
			大野狼来袭	未知数之解题	
			小 P 的奇幻 之旅	未知数之验算	6
			综合练习	综合练习	学习手册、 教学手册、PPT
			情境拟题		
		生活挑战王	列式		
5-a-04				加减、乘除互逆	3
			活动闯关		学习手册、 教学手册
			活动一 等量加法公理		
6-a-01		等量菜市场	活动二 等量减法公理		
			活动三 等量乘法公理		学习手册、 教学手册
			活动四 等量除法公理	4	
6-a-01	等量公理	活动一	等量加法、减法公	4	学习手册、

6-a-01	能理解等量公理 教師手冊	理	教学手册
6-a-02	能將分數與比例的具體 情境問題列成含有未知數符 號的等式，並求解並驗算 教師手冊	利用等量加、減法	
活动二	公理解含有未知数	X、Y 的方程式	
活动三	等量乘法、除法公	理	
活动四	利用等量乘、除法	X、Y 的方程式	
活动五	公理解含有未知数	X、Y 的方程式	
活动一	等量公理的应用	等量加法公理	
活动二	等量减法公理	等量减法公理	
活动三	等量乘法公理	等量乘法公理	
活动四	等量除法公理	4	学习手册、
百大覓景点(2)		教学手册	

伍、结语

本研究基于「数学学习机会的公平性」、「补救教材发展的迫切性」、以及「国小代数学习的重要性」，从国民小学「代数」主题出发：根据 97 年版的九年一贯课程纲要数学学习领域内一年级至六年级的各项「代数」分年细目，透过「代数小学堂」—国小代数补救教学研究小组的运作，经历「认识」、「解析」、「参考」、与「实作」阶段等四个阶段，共计研发出 18 套以数学游戏、数学绘本、生活情境、以及具体操作等不同学习路径的国小代数补救教材与教学活动。

本年度已分别于两所国小、一所国中、以及一间私立补习班等机构完成了7套代数补救教材与教学活动的实践，陆续还会于合作的个案学校中继续实践「代数小学堂」所发展的代数补救教材与教学活动，同时进行教材与教学活动的修订、以及学童代数学习表现与相关学习问题的整理。

期望藉由本研究的执行，能较具系统地研发代数补救教材、同时进一步协助教师在教学现场进行代数补救教学，以期能有效帮助国小学童顺利地从算术思维进阶至代数思维，进而提升国小学童的代数基本能力，以为未来更高深的数学学习做好准备。

主要参考文献

- 王文科译(1988)。儿童的认知发展导论。增订三版。台北：文景。
- 王春展 (1996)。情境学习理论及其在国小教育的应用，*国教学报*，8，53-71。
- 李美莲、刘祥通(2003)。开启国中代数教学的新视窗。科学教育，265，2-15。
- 吴宗立 (2000)。情境学习论在教学上的应用。*人文及社会学科教学通讯*，11(3)，157-164。
- 林光贤、郭汾派、林福来(1989)。国中生文字符号概念的发展。国科会专题研究计划报告。计划编号: NSC 77-0111-S004-001-A。
- 林清山、张景媛(1994)。国中生代数应用题教学策略效果之评估。教育心理学报，27，35-62。
- 林敏宜(2000)。图画书的欣赏与应用。台北：心理，页 225-226。
- 洪有情(2006)。青少年代数运算概念的「学习与教学」研究。行政院国家科学委员会科教处 95 年度数学教育学门专题研究计划成果报告，计划编号：NSC 95-2521-S-003-010。
- 徐新逸 (1996)。情境学习在数学教育上的应用。*教学科技与媒体双月刊*，29，13-22。
- 教育部 (2003)。国民教育九年一贯课程纲要：数学学习领域。台北市：教育部。
- 陈嘉皇(2006)。国小五年级学童代数推理策略应用之研究：以「图卡覆盖」解题情境归纳算式关系为例。屏东教育大学学报，25，318~412。
- 陈维民(1998)。儿童的未知数概念研究：一个国小六年级儿童的个案研究。国立高雄师范大学数学系硕士论文，未出版，高雄市。
- 黄宝彰(2002)。六、七年级学童数学学习困难部分之研究。国立屏东师范学院数理教育研究所硕士论文，未出版，屏东县。
- 赵云(1988)。儿童的语言世界。台北:洪建全基金会。
- 庄松洁(2004)。不同年级学童在具体情境中未知数概念及解题历程之研究。国立中山大学教育研究所硕士论文，未出版，高雄市。
- 刘凤芯译(2000)：阅读儿童文学的乐趣。台北：小鲁。
- 熊召弟(1996)。科学童话在自然科学教学的意义。国民教育，36(3)，26-31。
- 郑肇桢(1983)。教育途径的拓展。广角镜出版社。
- 戴文宾、邱守榕(2000)。国一学生由算术领域转入代数领域呈现的学习现象与特征。科学教育，10，148-175。
- 谢和秀、谢哲仁(2002)。国一学生文字符号概念及代数文字题之解题研究。九十一学年度师范院校教育学术论文发表会论文集，1491-1521。
- 谢瑶玲译(2003)。英语儿童文学史纲。台北：小鲁。
- 饶见维 (1996)。国小数学游戏教学法。台北：五南。

- Baxter, J. A., Woodward, J., Olson, D. & Robyns, J. (2001). Blueprint for writing in middle school mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8, 52-56.
- Bodanskii, F. (1991). The formation of an algebra method of problem solving in primary school children. In V. Davydov (Ed.), Soviet Studies in Mathematics Education (vol. 6, pp. 275-338). Reston, VA: NCTM.
- Booth, L. R. (1984). Algebra: Children's strategies and errors. Windsor, United Kingdom: NFER-Nelson.
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideals of Algebra, K-12* (pp.20-32). Reston VA: NCTM.
- Brito-Lima, A. P., & da Rocha Falcao, J. T. (1997). Early development of algebraic representation among 6-13 year old children: the importance of didactic contract. In proceedings of the 21th International Conference Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp 201-208), Lahti, Finland.
- Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. In Proceedings of the 27th International Conference Psychology of Mathematics Education (vol. 2,, pp 201-208), Lahti, Finland.
- Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18(1), 32-42.
- Cai, J., & Moyer, J. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades: some insights from international comparative studies. In C. E. Green & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carraher, D., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2001). Can Young Students Operate on unknowns. In Proceedings of 25th conference of the International Group for the PME (vol. 1, pp 130-140). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Collins, R., & Cooper, P. J. (1997). *The power of story: Teaching through storytelling*. Boston: Allyn and Bacon.
- Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth-and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (2), 111-144.
- Davidman, L. (1981). Learning style: the myth, the panacea, the wisdom. *Phi Delta Kappa May*, 641-645.
- Davis, R. (1989). Theoretical considerations: Research studies in how human think about algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.) *Research Issues in the Learning and Teaching of algebra*, vol. 4. (pp. 266-274) Restion, VA: NCTM/NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Davydov, V. (Ed.) (1991). *Soviet studies in mathematics education, vol. 6: Psychological abilities of primary school children in learning mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Deschenes, S., Cuban, L., & Tyack, D. (2001). Mismatch: Historical perspectives on schools and students who don't fit them. *Teachers College Record*, 103, 525-547.
- Empson, S. B. (2003). Low-Performing Students and Teaching Fractions for Understanding: An Interactional Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(4),305-343.

- Erlwanger, S., & Berlanger, M. (1983). *Interpretations of the equal sign among elementary school children*. Paper presented at the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education, Montreal, Canada.
- Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6, 232-236.
- Friedlander, A., & Taizi, N. (1987). Early algebra games. *Mathematics in School*, 16(1), 2.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133~155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 390-419).
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: what is it? *Mathematics Educator*, 8, 139-151.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 297-312.
- Lodholz, R. D. (1999). The transition from arithmetic to algebra. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12 : Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 52-58). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Saenz-Ludlow, A., & Walgamuth, C. (1998). Third Graders' Interpretations of Equality and the Equal Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 153-187.
- Schliemann, A.D., Carraher, D.W., & Brizuela, B.M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Thorpe, P. (1995). Spatial concepts and young children. *International Journal of Early Years Education*, 3, 63-73.